Definicja 1

Jednostkę urojoną oznacza się symbolem i, i definiuje się jako liczbę, której kwadraat jest równy -1.

Zatem mamy:
$i^2 = -1; \quad i^3 = ii^2 = -i; \quad i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1; \quad i^5 = ii^4 = i;$
$i^6 = i^3 I^3 = (-i)(-i) = i^2 = -1$ itd.

Liczby zespolone

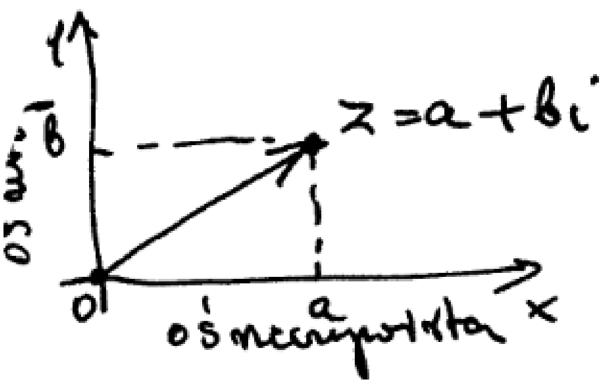
Algebraiczna postać zapisu liczby zespolonej jest następująca: $z = a + ib$ (lub $z = a + bi$) gdzie: $a, b \in \mathbb{R}$
Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej z i piszemy $a = Re(z)$
Liczbę b nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej z i piszemy $b = Im(z)$

Dla $b = 0$ zachodzi $z = a$, tak więc liczby rzeczywiste są szczególnymi przypadkami liczb zespolonych.
Dla $a = 0$ zachodzi $z = bi$, mówimy wtedy o liczbie czysto urojonej.

Liczby zespolone tworzą zbiór $\mathbb{C} = \{z = a+bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ zwany zbiorem liczb zespolonych.

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Na płaszczyźnie zespolonej każdy punkt o współrzędnych (a, b) jest jednoznacznie wyznaczony przez jego wektor wodzący. Każdej liczbie $a + bi$ odpowiada wektor zaczepiony w początku układu współrzędnych o końcu w punkcie (a, b).



Płaszczyzna zespolona zwana też płaszczyzną Gaussa daje możliwość interpretowania każdej liczby zespolonej $z = a + bi$ jako punktu o współrzędnych (a, b). Jeśli $b = 0$, to widzimy, że otrzymujemy liczbę rzeczywistą a.
Zatem zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest podzbiorem zbioru liczb $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Liczby rzeczywiste są zatem liczbami zespolonymi o części urojonej równej zero.

Równość liczb zespolonych

Dwie liczby zepolone z_1 i z_2 są równe jeśli odpowiada im ten sam punkt płaszczyzny Gaussa lub ten sam wektor wodzący. Inaczej mówiąc:

$$z_1 = z_2 \iff Re(z_1) = Re(x_2) \quad \text{oraz} \quad Im(z_1) = Im(z_2)$$

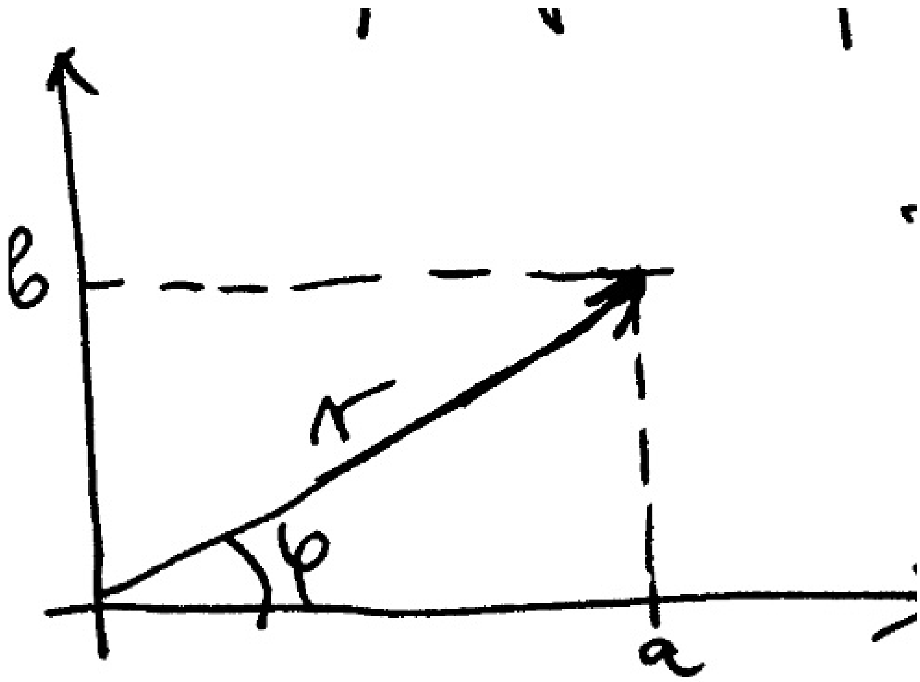
.

Dla liczb zespolonych pojęcia "większa liczba" i "mniejsza liczba" nie są definiowane.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Przedstawienie liczby zespolonej jako $z = a+bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy przedstawieniem algebraicznym.

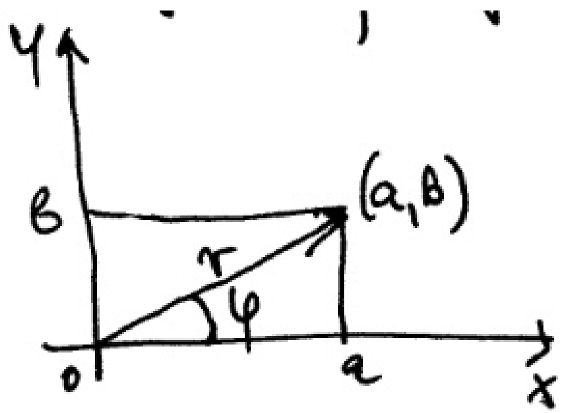
Jeśli zamiast współrzędnych kartezjańskich pozłużymy się układem współrzędnych biegunowych, to otrzymamy postać trygonometryczną liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



Oznaczmy $|z| = r \quad (0 \leqslant r \leqslant \infty)$

Tak określoną liczbę nazywamy modułem liczby zespolonej z.
Liczbę $argz = \varphi + 2k\pi$ gdzie $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ oraz $k = 0, \pm1, \pm2\ldots$ nazywamy argumentem liczby zespolonej z. Kąt φ nazywa się wartością główną argumentu (argumentem głównym) liczby zespolonej.

Związek między r, φ, a i b dla danej liczby zespolonej jest analogiczny do relacji między współrzędnymi kartezjańskimi i biegunowymi na płaszczyźnie.



$\frac{b}{r} = \sin\varphi$ skąd $b = r\sin\varphi$

$\frac{a}{r} = \cos\varphi$ skąd $a = r\cos\varphi$
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
Liczba zespolona $0 + 0i = 0$ ma moduł równy 0, zaś argument jest nieokreślony.

Przedstawienie wykładnicze liczby zespolonej

Wzór Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Zatem liczba $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ może być przedstawiona w postaci $z = re^{i\varphi}$ Przedstawienie $z = re^{i\varphi}$ nazywamy przedstawieniem wykładniczym liczby zespolonej z.

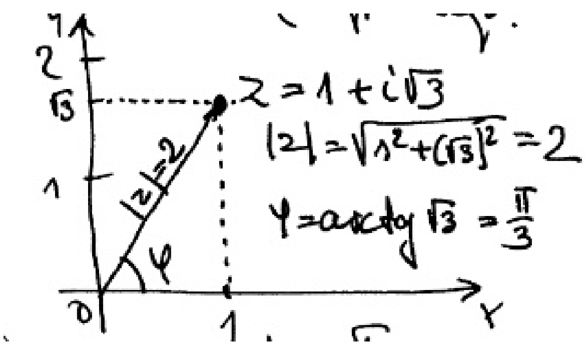
Wnioski
Liczbę zespoloną z można przedstawić na trzy sposoby:
-algebraicznie: $z = a + bi$
-trygonometrycznie: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
-wykładniczo: $x = re^{i\varphi}$
W postaci trygonometrycznej użyto tu tylko argumentu głównego.

Przykład(różne przedstawienia liczby zespolonej z)

$z = 1 + i\sqrt{3}$

$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$



Ogólnie z użyciem nie tylko argumentu głównego mamy:
$z = 1 + i\sqrt{3} = 2[\cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] = 2e^{[i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)]}$ dla $k = 0, \pm1, \pm2\ldots$

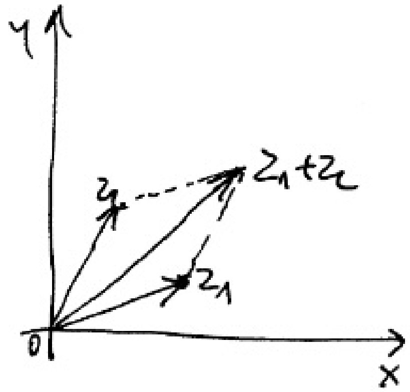
Liczby zespolone sprzężone (oznaczane z^* lub $\overline{z}$)

Dwie liczby zespolone z i $\overline{z}$ nazywa się sprzężonymi, jeśli ich części rzeczywiste są równe a części urojone różnią się jedynie znakiem (są równe co do bezwzględnej wartości).

W interpretacji geometrycznej punkty odpowiadające liczbom sprzężonym są punktami symetrycznymi względem osi rzeczywistej.
Moduły liczb sprzężonych są równe, wartości główne argumentów różnią się jedynie znakiem.
$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$
$\overline{z} = a - bi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi}$

Działania algebraiczne na liczbach zespolonych
Dodawanie i odejmowanie

Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych definiujemy następująco:
$z_1 + z_2 - z_3 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) - (a_3 + ib_3) = (a_1 + a_2 - a_3) + i(b_1 + b_2 - b_3)$
W interpretacji geometrycznej dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych odpowiada dodawaniu i odejmowaniu wektorów na płaszczyźnie.

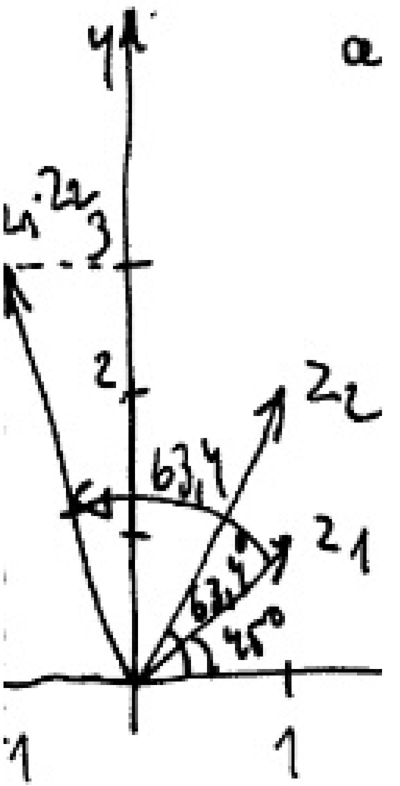


Mnożenie liczb zespolonych
Mnożenie dwóch liczb zespolonych z_1 i z_2 zdefiniowane jest algebraicznie wzorem:
$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$

W zapisie trygonometrycznym
$z_1z_2 = [r1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
To znaczy moduł iloczynu jest iloczynem modułów, zaś argument iloczynu jest sumą argumentów.
W zapisie wykładniczym

$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Zgodnie z interpretacją geometryczną wektor przedstawiający iloczyn z_1z_2 otrzymujemy przez obrót wektora z_1 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt będący argumentem wktora z_2, złożony ze skalowaniem czynnikiem $|z_2|$.



Przykład

$z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$. Wtedy $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ oraz $|z_2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Algebraicznie:
$z_1 z_2 = (1 + i)(1 + 2i) = 1 + 2i + i + 2i^2 = (1 - 2) + 3i = -1 + 3i$

Trygonometrycznie:
$z_1 z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\sqrt{5}(\cos 63.43 + i\sin 63.43) = \sqrt{10}(\cos(45 + 63.43) + i\sin(45 + 63.43))$

Dzielenie liczb zespolonych

Dzielenie dwóch liczb zespolonych definiuje się jako działanie odwrotne do mnożenia.
W zapisie algebraicznym:'

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$

W zapisie trygonometrycznym:

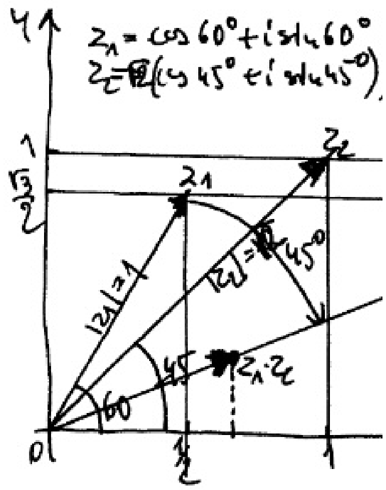
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

W zapisie wykładniczym:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

W interpretacji geometrycznej wektor odpowiadający ilorazowi $\frac{z_1}{z_2}$ otrzymujemy obracając wektor z_1 o kąt $arg z_2$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara a naztępnie dzieląc jego długość przez $|z_2|$.

Przykład



Niech $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $z_2 = 1 + i$

Wtedy $z_1 = \cos 60 + i \sin 60$ oraz $z_2 = \sqrt{2}(\cos 45 + i \sin 45)$
Z rysunku widzimy, że $|z_1| = 1$ oraz $|z_2| = \sqrt{2}$

Zatem $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 15 + i \sin 15) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 15 + i \sin 15)$

Potęgowanie liczb zespolonych

n-tą potęgę liczby zespolonej oblicza się za pomocą wzorów de'Moivre'a:

$z^n = [r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin\varphi)$
(Warto przypomnieć, że $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ i w ogólności $i^{4n+k} = i^k$)

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

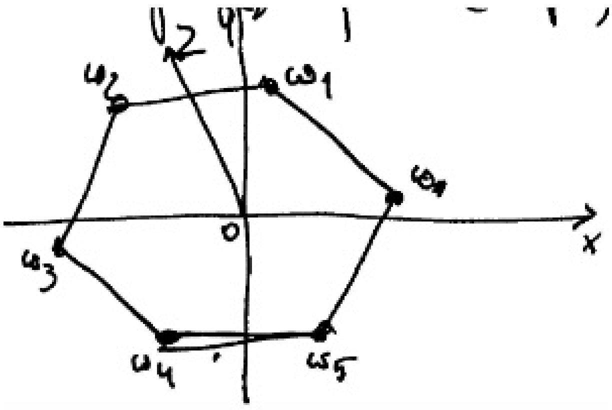
Pierwiastkowanie stopnia n jest działaniem odwrotnym do potęgowania.
Niech $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Stosuje się następujące oznaczenia dla wszystkich n pierwiastków:

$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

Wzór na obliczanie pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z:
$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ gdzie $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

W interpretacji geometrycznej punkty na płaszczyźnie Gaussa przedstawiające pierwiastki ω_k są wierzchołkami pewnego n-kąta foremnego o środku w początku układu współrzędnych.


v_2
y
ω_1
ω_2
ω_3
ω_4
ω_5
0
x